

Klasse B12T5

3. Schulaufgabe aus der Mathematik am 04.04.2011

Analysis

1.0 Gegeben ist die reelle Funktion $f_k: x \mapsto \frac{x+5}{e^{0,5x+k}}$ mit $D = \mathbb{R}$ und $k \in \mathbb{R}$.

1.1 Begründen Sie, welchen Einfluss eine Vergrößerung von k auf den Verlauf des Graphen von f hat. [3]

1.2 Bestimmen Sie k so, dass der Graph durch den Punkt $P(-2 | 3)$ verläuft. [2]

Für alle folgenden Aufgaben ist $k = 1$ und $f_1(x) = f(x)$.

1.3 Berechnen Sie die Koordinaten der Schnittpunkte des Graphen von f mit den Koordinatenachsen. Untersuchen Sie das Verhalten von f für $|x| \rightarrow \infty$. [5]

1.4 Ermitteln Sie das Monotonieverhalten sowie Art und Koordinaten des relativen Extrempunkts. [5]

[mögliches Teilergebnis: $f'(x) = \frac{-x-3}{2e^{0,5x+1}}$]

1.5 Untersuchen Sie das Krümmungsverhalten der Funktion f und berechnen Sie die Gleichung der Wendetangente t_w . [Teilergebnis: $x_w = -1$] [8]

1.6 Zeichnen Sie mit Hilfe der bisherigen Ergebnisse die Graphen von f und von t_w für $-5,5 \leq x \leq 4$. [4]

1.7 Man betrachtet nun die Tangente an den Graphen G_f von f in einem Punkt Q , der G_f durchläuft. Begründen Sie, welche Werte die Steigung der Tangente annehmen kann. [3]

2.1 Gegeben ist die reelle Funktion $F: x \mapsto (ax + b) e^{-0,5x-1}$. Bestimmen Sie die reellen Zahlen a und b so, dass F eine Stammfunktion von f ist. (Ergebnis: $a = -2$; $b = -14$) [3]

2.2 Der Graph von f und die Koordinatenachsen begrenzen im II. Quadranten ein endliches Flächenstück. Kennzeichnen Sie dieses Flächenstück und berechnen Sie die Maßzahl seines Flächeninhaltes. [4]

Analytische Geometrie

3.0 In einem kartesischen Koordinatensystem sind Punkte $A(20|0|0)$, $B_k(0|0|-10k)$, $C_k(2|2|2-9k)$ gegeben. Sie legen für alle Werte von $k \in \mathbb{R}$ die Ebene E_k fest. (Nachweis nicht erforderlich !).

3.1 Stellen Sie eine Gleichung der Ebene E_k in Normalform auf. Beschreiben Sie die besondere Lage von E_0 (für $k = 0$) im Koordinatensystem. (Mögliches Ergebnis: $E_k: kx_1 - 2x_2 + 2x_3 - 20k = 0$) [5]

3.2 Zeigen Sie, dass die Schnittgerade s der Ebenen E_k ($k \neq 0$) und E_0 unabhängig vom Parameter k ist. Welche Folgerung ergibt sich daraus für die Lage der Ebenen E_k ? [5]

3.3 Die Punkte A , B_k , der Koordinatenursprung O und der Schnittpunkt der Ebene E_k mit der x_2 -Achse bilden Pyramide. Bestimmen Sie alle Werte von k , für die die Volumenmaßzahl 500 [VE] beträgt. [5]

3.4 Die Ebene E_3 ($k = 3$) wird als eine ebene Seitenfläche eines Erdhügels betrachtet. Regenwurm Jack Thewood (Länge 10 [LE]) gräbt sich in einer geraden Röhre durch den Koordinatenursprung O direkt in Richtung E_3 zur Oberfläche. Entscheiden Sie durch Rechnung, ob sein hinteres Ende den Koordinatenursprung schon passiert hat, wenn sein vorderes Ende die Oberfläche erreicht. [6]

